Eine analytische Übung*

Leonhard Euler

§1 Denn das den Kosinus eines jeden Winkels ausdrückende unendliche Produkt, welches ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \left(1-\frac{1}{nn}\right)\left(1-\frac{1}{9nn}\right)\left(1-\frac{1}{25nn}\right)\left(1-\frac{1}{49nn}\right) \text{ etc},$$

Betrachtenden kommt es in den Sinn eine Methode ausfindig zu machen, mit dessen Hilfe umgekehrt aus der natürlichen Beschaffenheit dieses Produktes sein Wert, welchen wir wissen $= \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ zu sein, heraus gefunden werden kann, bei welcher Aufgabe sich mehrere Kunstgriffe offenbart haben, von deren Erklährung ich sicher bin, dass sie den Geometern nicht angenehm sein wird.

§2 Ich lege also fest

$$S = \left(1-\frac{1}{nn}\right)\left(1-\frac{1}{9nn}\right)\left(1-\frac{1}{25nn}\right) etc$$

und nach Nehmen von Logarithmen geht für mich hervor:

$$\ln S = \ln\left(1-\frac{1}{nn}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{9nn}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{25nn}\right) + etc$$

und weil gilt

*Orginaltitel: „Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium quas tamen ad rationalitatem perducere licet“, erstmals publiziert in“Institutiones calculi integralis 4, 1794, pp. 48-59 “, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 19, pp. 98 - 109 “ und „ Institutiones calculi integralis, ed. tertia, 4, 1845, pp. 48-59 [E669a] “ , Eneström-Nummer E669, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Stefan Faldum, im Rahmen des Projektes „Hauptseminar Euler WS 2013/14 “

$$\ln(1-\tfrac{1}{x}) = -\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2xx} - \tfrac{1}{3x^3} - \tfrac{1}{4x^4} - etc,$$

wird nach Ordnen dieser Reihen und Ändern der Vorzeichen sein

$$\begin{aligned}
-\ln S \quad &= \tfrac{1}{nn} + \tfrac{1}{2n^4} + \tfrac{1}{3n^6} + \tfrac{1}{4n^8} + etc \\
&+ \tfrac{1}{9nn} + \tfrac{1}{2*9^2n^4} + \tfrac{1}{3*9^3n^6} + \tfrac{1}{4*9^4n^8} + etc \\
&+ \tfrac{1}{25nn} + \tfrac{1}{2*25^2n^4} + \tfrac{1}{3*25^3n^6} + \tfrac{1}{4*25^4n^8} + etc \\
&+ \tfrac{1}{49nn} + \tfrac{1}{2*49^2n^4} + \tfrac{1}{3*49^3n^6} + \tfrac{1}{4*49^4n^8} + etc
\end{aligned}$$

§3 Wenn wir nun die einzelnen vertikalen Spalten entsprechend anordnen, werden wir die folgenden Reihen für $-\ln S$ erhalten:

$$\begin{aligned}
-\ln S \quad &= \tfrac{1}{nn}(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \tfrac{1}{9^2} + etc) \\
&+ \tfrac{1}{2n^4}(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \tfrac{1}{9^4} + etc) \\
&+ \tfrac{1}{3n^6}(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \tfrac{1}{9^6} + etc) \\
&+ \tfrac{1}{2n^4}(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \tfrac{1}{9^8} + etc)
\end{aligned}$$

und so ist die Aufgabe auf die Summation der Reihen der gerade Istenzen der harmonischen Progression 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, *etc* geführt worden.

§4 Ich habe aber auch gezeigt, nachdem der Kürze wegen $\frac{\pi}{2} = \delta$ gesetzt worden ist, wenn die Summen dieser Potenzen auf folgende Weise dargestellt werden:

$$\begin{gathered}
1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + etc = A\delta^2, \\
1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + etc = B\delta^2, \\
1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + etc = C\delta^2, \\
\text{etc}
\end{gathered}$$

dass zuerst $A = \frac{1}{2}$ ist, dann aber die übrigen Buchstaben auf die folgende Weise durch die Vorhergehenden bestimmt werden:

$$\begin{gathered}
B = \tfrac{2}{3}A^2,\ C = \tfrac{2}{5}2AB,\ D = \tfrac{2}{7}(2AC + BB), \\
E = \tfrac{2}{9}(2AD + 2BC),\ F = \tfrac{2}{11}(2AE + 2BD + CC), \text{ etc,}
\end{gathered}$$

die Gültigkeit wessen sich zugleich aus der wunderschönen Übereinstimmung mit dieser Analysis zeigen wird.

§5 Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, erhalten wir diese Reihe:

$$-\ln S \;=\; \frac{A\delta^2}{nn} + \frac{1}{2}\cdot\frac{B\delta^4}{n^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C\delta^6}{n^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{D\delta^8}{n^8} + \; etc$$

wenn wir daher also $\frac{\delta}{n} = \chi$ setzen, dass $\chi = \frac{\pi}{2n}$ ist, wird diese Reihe diese Form annehmen:

$$-\ln S = A\chi\chi + \tfrac{1}{2}B\chi^4 + \tfrac{1}{3}C\chi^6 + \tfrac{1}{4}D\chi^8 + etc.$$

Um die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc zu beseitigen, wollen wir differenzieren, und nach einer Division durch $2\partial\chi$ werden wir erreichen:

$$-\frac{\partial S}{2S\partial\chi} = A\chi + B\chi^3 + C\chi^5 + D\chi^7 + etc.$$

§6 Wir wollen hier der Kürze wegen $-\frac{\partial S}{2S\partial\chi} = \tau$ festlegen, dass wir haben:

$$\tau = A\chi + B\chi^3 + C\chi^5 + D\chi^7 + etc.;$$

wobei nach Nehmen von Quadraten diese Reihe entspringen wird:

$$\begin{aligned}\tau\tau = AA\chi\chi + AB\chi^4 + 2AC\chi^6 + 2AD\chi^8 + 2AE\chi^{10} + etc.\\ +BB\chi^6 + 2BC\chi^8 + 2BD\chi^{10} + etc.\\ +CC\chi^{10} + etc.\end{aligned}$$

und so haben wir schon für jede Istenz von τ die Formeln erlangt, mit denen die Bestimmung der Buchstaben A,B,C,D fortgesetzt wird: Es fehlen nur jene Koeffizienten $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, *etc.*

§7 Diese Koeffizienten werden wir aber durch Integrieren einführen, nachdem wir mit $2\partial\chi$ multipliziert haben werden. Es wird nämlich aufgefunden werden:

$$\begin{aligned}2\int\tau\tau\partial\chi \quad &= \tfrac{2}{3}A^2\chi^3 + \tfrac{2}{5}2AB\chi^5 + \tfrac{2}{7}(2AC+BB)\chi^7\\ &+\tfrac{2}{9}(2AD+BC)\chi^9 + \tfrac{2}{11}(2AE+2BD+CC)\chi^{11} + etc.\end{aligned}$$

Weil nun gilt:

$$\tfrac{2}{3}A^2 = B,\; \tfrac{2}{5}2AB = C,\; \tfrac{2}{7}(2AC+BB) = D,\; etc$$

werden wir, nachdem diese Werte wieder eingesetzt worden sind, zu dieser Reihe gelangen:

$$2\int\tau\tau\partial\chi = B\chi^3 + C\chi^5 + D\chi^7 + E\chi^9 + \; etc.$$

§8 Weil wir also zuvor die Reihe gehabt hatten:

$$\tau = A\chi + B\chi^3 + C\chi^5 + D\chi^7 + \ etc.$$

fließt daher offenbar die Gleichung:

$$\tau = A\chi + 2\int \tau\tau\partial\chi,$$

die differenziert gibt

$$\partial\tau = A\partial\chi + 2\tau\tau\partial\chi = \tfrac{1}{2}\partial\chi + 2\tau\tau\partial\chi, \text{ wegen } A = \tfrac{1}{2}$$

Daher werden wir also $\partial\partial\tau = \partial\chi(1+4\tau\tau)$ haben, wobei $\partial\chi = \frac{2\partial\tau}{1+4\tau\tau}$ wird, deren Integral leicht ist, es ist natürlich $\chi = A\tan(2\tau)$, wo die Addition einer Konstante nicht von Nöten ist, weil ja nach Setzen von $\chi = 0$ τ schon von selbst verschwindet. Nachdem also diese Gleichung gefunden worden ist, wenn die Größe χ wie ein Winkel angegeben wird, wird umgekehrt $2\tau = \tan\chi$ sein. Es war aber $\tau = -\frac{\partial S}{2S\partial\chi}$, wobei diese Gleichung erschlossen wird:

$$-\frac{\partial S}{S\partial\chi} = \tan(\chi), \text{ und daher } -\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial\chi\sin\chi}{\cos\chi}$$

§9 Weil also $\partial\chi\sin\chi = -\partial\cos\chi$ ist, wird $\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial\cos\chi}{\cos\chi}$ sein, und daher durch Integratieren $\ln S = \ln(\cos\chi) + C$, welche Konstante daraus bestimmt werden muss, dass nach Setzten von $\chi = 0$ $\ln S = 0$ wird. Daher wird also $C = 0$ sein, so dass $\ln S = \ln(\cos\chi)$ ist, und daher, indem zu Zahlen übergegangen wird,wird $S = \cos\chi$ werden.

§10 Wir hatten aber $\chi = \frac{\pi}{2n}$ gesetzt, wobei natürlich der gesuchte Wert S also $S = \cos\frac{\pi}{2n}$ hervorgeht, genauso wie schon zuvor bekannt war. Diese Analysis bestätigt also außergewöhnlich jene Relation zwischen den Buchstaben A,B,C,D, die ich anders woher in der Rechnung eingeführt habe.